УДК 530.145 (075.8)

А. А. Шпилевой, А. В. Юров, В. А. Гриценко

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ КАК МОДЕЛЬ ДВУМЕРНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ

Изучены преобразования Дарбу — Лапласа для уравнений Бойти — Леона — Пемпинелли. Эти уравнения являются (1+2)-мерными обобщением модели sh-Гордон и дополнительно редуцируются в диссипативное уравнение Бюргерса в одномерном пределе. Построены как локализованные решения, так и решения, демонстрирующие наличие режимов с обострением.

We study the Darboux and Laplace transformations for the Boiti — Leon — Pempinelli equations (BLP). These equations are the (1+2) generalization of the sinh-Gordon equation. In addition, the BLP equations reduced to the Burgers equation in a one-dimensional limit. Localized nonsingular solutions in both spatial dimensions and anti "blow-up" solutions are constructed.

Ключевые слова: диссипативные структуры, оптические солитоны, преобразования Дарбу — Лапласа, уравнения Бойти — Леона — Пемпинелли.

Key words: dissipative structures, optic solitons, Darboux and Laplace transformations, Boiti — Leon — Pempinelli equations.

Применение оптических солитонов является весьма перспективным для развития методов передачи информации в системах с повышенными требованиями к точности и надежности операций, в частности в волоконно-оптических линиях связи. В настоящее время достаточно хорошо изучены одномерные оптические солитоны, описываемые нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ) (эффект двумерной фокусировки), а также 2п-импульсы самоиндуцированной прозрачности (СИП). Если использовать промежуточные усилители на основе (Er3+)-легированного волокна, то можно создать линии связи чрезвычайно большой длины, которые обеспечивают скорость передачи сигналов, превышающую Гбит/с.

Вместе с тем при передаче на большие расстояния следует ожидать проявления эффектов отклонения от самофокусировки, что приводит к необходимости учета неодномерности волокна. Анализ малых поправок сильно осложняется использованием сингулярной теории возмущений. Более корректным представляется подход, основанный на анализе структур, локализованных в пространстве и сохраняющих это свойство в течении длительного времени. Это приводит к очень трудной теоретической и практической задаче построения и изучения многомерных солитонов. Например, в простейшем случае двух пространственных переменных процедура использования медленно меняющейся огибающей и метода многомасштабных разложений приводит к уравнениям Дэви — Стюартсона (ДС), которые являются двумерным интегрируемым обобщением НУШ. В зависимости от знака коэффициента при члене, описывающем эффект дифракционного расширения пучка, могут реализовываться две модели ДС-1 и ДС-2 (в математической литературе рассматривают четыре модели, но лишь две из них интегрируемы). В первом случае система допускает устойчивые двумерные солитоны, названные дромионами, а во втором солитоны, по-видимому, отсутствуют.

Кроме того, при рассмотрении длинных линий пренебрежение эффектами диссипации становится недопустимым, поэтому особую важность приобретает изучение нелинейных, диссипативных систем. Как правило, такие структуры не описываются интегрируемыми моделями, однако замечательным исключением является уравнение, выведенное Бойти — Леоном — Пемпинелли (БЛП). Первоначально система БЛП рассматривалась как двумеризованное обобщение уравнений sin-Гордон (sh-Гордон в комплексной плоскости). Позднее одним из авторов данной статьи было показано, что это уравнение допускает одномерную редукцию в уравнение Бюргерса, т. е. описывает диссипативные процессы.

В данной работе мы показываем, что двумерные структуры, описываемые уравнениями БЛП, приводят к режимам с обострением, характерным для тепловых структур, возникающих в нелинейных средах, в которых есть два конкурирующих процесса: нелинейный источник (отражающий положительную обратную связь) и диссипативный процесс.

Локализированные структуры зачастую ассоциируются с дисперсией и нелинейностью. В литературе изучен большой класс нелинейных уравнений с дисперсией в двухмерном пространстве. Некоторые из них имеют физическое значение, такие, как уравнения Деви — Стюартсона (ДС) и Кадомцева — Петвиашвили (КП). Уравнения ДС являются (1 + 2)-мерным интегрируемым обобщением нелинейного уравнения Шрёдингера, а уравнения КП — уравнения КдФ. Несколько лет назад внимание исследователей привлекло (1 + 2)-мерное, интегро-дифференциальное уравнение Бойти — Леона — Пемпинелли [1; 2], которое может быть упрощено до уравнения либо sin-Гордона, либо sh-Гордона в одномерном пределе. В работе [1] Бойти, Леон и Пемпинелли использовали преобразование Беклунда для поиска солитонного решения. В статье [2] продемонстрировано, что рассматриваемое уравнение — гамильтоново, и построены некоторые солитоноподобные решения.

Модель БЛП могут быть записаны как система двух уравнений [1; 2]:

$$\begin{aligned} &a_{ty} + (a^2 - a_x)_{xy} + 2b_{xx} = 0, \\ &b_t + (b_x + 2ab)_x = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a = a(t,x,y)$, $b = b(t,x,y)$. Удобно ввести новую зависимую переменную $p = p(t,x,y)$, которая удовлетворяет условию $b = p_y$, тогда

$$
\begin{aligned}
&a_t + 2aa_x + (2p - a)_{xx} = 0,\\
&p_{yt} + (p_{yx} + 2ap_y)_x = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Будем называть (1) и (2) уравнениями БЛП. Они обладают парой Лакса [L, A] и гамильтоновой структурой [2]. С другой стороны, подстановка $p = 0$ редуцирует (2) в дифференциальное уравнение Бюргерса

$$a_t + 2aa_x - a_{xx} = 0. \tag{3}$$

Если выбрать $p = a$, то (2) сводится к уравнению «анти-Бюргерса», которое получается из (3) отражением $t \to -t, x \to -x$.

То обстоятельство, что уравнения БЛП допускают редукцию к диссипативному уравнению, не противоречит установленному факту наличия у этой системы гамильтоновой структуры. Действительно, можно показать, что при $b = 0$ гамильтониан также обращается в нуль. Более того, сам факт существования гамильтониана (как и двух дополнительных законов сохранения [2]) возможен только в особом случае асимптотического поведения a и b: $a \to 0$ и $b \to const$, при $x^2 + y^2 \to \infty$ [2]. Только если данные условия не выполнены, допустимы (анти)диссипативные решения БЛП.

Уравнения (1) и (2) являются условием совместности линейной системы уравнений ([L, A] пары):

$$\varphi_{xy} + a\varphi_y + p_y\varphi = 0, \;\; \varphi_t = \varphi_{xx} + 2p_x\varphi. \tag{4}$$

Пусть φ и ψ – решения (4). Мы определим две функции: $\tau = \partial_x(\ln\psi)$ и $\rho = (\partial_y(\ln\psi))^{-1}$. Уравнение (4) ковариантно по отношению к двум типам преобразований Дарбу (ПД):

$$\varphi \to \varphi[1] = \rho\varphi_y - \varphi, \;\; a \to a[1] = a - \partial_x \ln\rho, \;\; p \to p[1] = p - \rho p_y \tag{5}$$

и

$$\varphi \to \varphi[1] = \varphi_x - \tau\varphi, \;\; a \to a[1] = a - \partial_x \ln(a + \tau), \;\; p \to p[1] = p + \tau. \tag{6}$$

Кроме того, уравнение (4) ковариантно и по отношению к преобразованиям Лапласа (ПЛ):

$$
\begin{aligned}
\varphi &\to \varphi[1] = \frac{\varphi_y}{p_y},\\
a &\to a[1] = a + \partial_x \ln p_y,\\
p &\to p[1] = p + a + \partial_x \ln p_y,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

причем обратное преобразование осуществляется по формулам

$$
\begin{aligned}
\varphi &\to \varphi[-1] = \partial_x\varphi + a\varphi,\\
a &\to a[-1] = a - \partial_x \ln(p \;\; - a)_y,\\
p &\to p[-1] = p - a,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

а также ПД могут быть проитерированы. В частности, результат N-кратного ПД (5) выражается с помощью следующих формул:

$$\varphi[N]=\frac{D_N(1|1)}{D_N(1,N+2|1,2)},$$
$$a[N]=a-\partial_x\ln\frac{D_N(1,2|1,2)}{D_N(1,N+2|1,2)}, \qquad (9)$$
$$p[N]=p+(-1)^N\frac{D_N(1|2)}{D_N(1,N+2|1,2)},$$

где $D_N(i,j|k,m)$ – определители, которые могут быть получены удалением столбцов i, j и строчек k, m из матрицы (N + 2) x (N + 2) определителя D_N:

$$D_N=\begin{vmatrix}\partial^{N+1}p & \partial^N p & \partial^{N-1}p & \dots & \partial p & p\\ \partial^{N+1}\varphi & \partial^N\varphi & \partial^{N-1}\varphi & \dots & \partial\varphi & \varphi\\ \partial^{N+1}\varphi_1 & \partial^N\varphi_1 & \partial^{N-1}\varphi_1 & \dots & \partial\varphi_1 & \varphi_1\\ . & & & & & .\\ . & & & & & .\\ . & & & & & .\\ \partial^{N+1}\varphi_N & \partial^N\varphi_N & \partial^{N-1}\varphi_N & \dots & \partial\varphi_N & \varphi_N\end{vmatrix}. \qquad (10)$$

В выражении (10) для краткости полагаем $\partial_y\equiv\partial$. Для ПД (6) получаем

$$\varphi[N]=\frac{W_N}{W_N(1|1)},\quad a[N]=-\frac{W_N(2|1)}{W_N(1|1)},\quad p[N]=\frac{W_N(3|1)}{W_N(1|1)}, \qquad (11)$$

где

$$W_N=\begin{vmatrix}\partial^N\varphi & \partial^{N-1}\varphi & \dots & \varphi\\ \partial^N\varphi_1 & \partial^{N-1}\varphi_1 & \dots & \varphi_1\\ . & & & .\\ . & & & .\\ . & & & .\\ \partial^N\varphi_N & \partial^{N-1}\varphi_N & \dots & \varphi_N\end{vmatrix}, \qquad (12)$$

и $\partial_x\equiv\partial$. Указанные формулы могут быть доказаны по индукции. Несколько сложнее выглядят итерационные формулы для N-кратного ПЛ a[N] (a[-N]) и b[N] (b[-N]), но в данной работе они нам не понадобятся.

В работе [2] автор применил преобразование Беклунда для построения точных решений, которые рационально убывают во всех направлениях на плоскости: $a \to 0$ и $b \to const$, если $x^2 + y^2 \to \infty$. Ниже мы продемонстрируем, что ПД (5), (9) и (6) позволяют получить широкий набор точных решений уравнений БЛП (2). Мы рассмотрим два примера:

(*) локализированное несингулярное решение b убывает по экспоненциальному закону как функция, зависящая от x, и по рациональному закону как функция, зависящая от y.

(**) «взрывающееся» решение (режим с обострением), содержащее особенность при t < 0 и регулярное при t > 0.

Положим, что $a = b = 0$. Чтобы построить решение, удовлетворяющее условию (*) выберем решение (4) в виде

$$\psi = \exp(\mu^2 t)\cosh(\mu x) + B(y),$$

где $B = B(y)$ — произвольная дифференциальная функция. Приняв во внимание (6), получим

$$b[1] = -\frac{\mu B' \sinh(\mu x)\exp(\mu^2 t)}{(B + \cosh(\mu x)\exp(\mu^2 t))^2},$$

$$a[1] = -\frac{\mu(\exp(\mu^2 t) + B\cosh(\mu x))}{\sinh(\mu x)(B + \cosh(\mu x)\exp(\mu^2 t))}. \tag{13}$$

Если мы выберем функцию $B(y)$, растущую экспоненциально при $y \to \pm\infty$, то функция (13) будет обладать незамкнутыми линиями уровня, поэтому следует выбирать функцию, являющуюся четным многочленом (четность гарантирует несингулярность в поведении (13)). Таким образом, приняв $B(y) = v^2 y^{2N} + \lambda^2$ (v и λ - константы и $\wp v = \wp \lambda = 0$), получим

$$b[1] = -\frac{2\mu N v^2 y^{2N-1}\sinh(\mu x)\exp(\mu^2 t)}{(\lambda^2 + v^2 y^{2N} + \cosh(\mu x)\exp(\mu^2 t))^2}. \tag{14}$$

Решение (14) убывает, согласно экспоненциальному закону, при $x \to \pm\infty$ и, по рациональному закону ($1/y^{2N+1}$), при $y \to \pm\infty$, в то же время точное решение a[1] имеет линии уровня вдоль оси y.

Чтобы построить решения, демонстрирующие наличие режима с обострением (**), следует использовать ПД (5) и (6) на «нулевом фоне» ($a = b = 0$). Тогда

$$b[2] = \frac{W_2(1|1)D_2(1,4|1,2)}{D_2^2(1,1|1,1)}. \tag{15}$$

Обе функции $\varphi_k (k = 1,2)$ из определителей D и W (см. (10) и (12)) являются решениями (4). Выберем их в виде

$$\varphi_1 = C_1 \exp(\lambda^2 t)\cosh(\lambda x) + \cosh(\alpha y),\ \ \varphi_2 = C_2 \exp(-\mu^2 t)\sin(\mu x) + \sinh(\beta y).$$

Тогда $D_2(1,1|1,1) = D_1(y) + D_2(x,y,t)$, где

$$D_1(y) = \beta\cosh(\beta y)\cosh(\alpha y) - \alpha\sinh(\beta y)\sinh\alpha y\,,$$
$$D_2(x,y,t) = \beta C_1\exp(\lambda^2 t)\cosh(\lambda x)\cosh(\beta y) -$$
$$-\alpha C_2\exp(-\mu^2 t)\sinh(\alpha y)\sin(\mu x).$$

Если $\beta > \alpha > 0$, тогда $D_1(y) > 0$ для всех $y \in (-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим $D_2(x,y,t)$. Очевидно, $D_2(x,0,t) > 0$ при $C_1 > 0$, т.е. решение (15) несингулярно для y = 0. Сингулярность может возникнуть, если $D_2(x,y,t) < 0$, что становится возможным при условии существования таких значений x', y', z' переменных x, y, z, при которых $D_2(x', y', t') = 0$, т.е.

$$\rho\exp((\lambda^2 + \mu^2)t')\cosh(\beta y')\cosh(\lambda x') = \sinh(\alpha y')\sin(\mu x')\,, \qquad (16)$$

где $\rho \equiv \beta C_1(\alpha C_2)^{-1}$. Очевидно, что условие (4) нарушается при $y' = 0$. Произведем замену в выражении (16):

$$\rho\exp((\lambda^2 + \mu^2)t')|\theta_1(y')| = |\theta_2(x')|, \qquad (17)$$

$$\text{с } \theta_1(y) = \frac{\cosh(\beta y)}{\sinh(\alpha y)},\ \ \theta_2(x) = \frac{\sin(\mu x)}{\cosh(\lambda x)}.$$

Нас интересует такой выбор параметров, при которых (17) не выполняется, поскольку этот случай гарантирует нам несингулярное поведение (15). Пусть y_0 и x_0 являются решениями уравнений

$$\tanh(\beta y_0)\tanh(\alpha y_0) = \frac{\alpha}{\beta},\ \ \tanh(\lambda x_0)\tan(\mu x_0) = \frac{\mu}{\lambda}$$

и x_0 соответствует максимуму функции $\theta_2(x)$. Так как $\exp((\lambda^2 + \mu^2)t') \geq 1$ при $t' \geq 0$, то для таких значений t можно выбрать

$$\rho > \frac{\theta_2(x_0)}{\theta_1(y_0)}\,. \qquad (18)$$

Таким образом, условие (18) означает несингулярность (15) при $t \geq 0$. Также можно выбрать параметры, при которых (15) будет иметь сингулярное решение в заданном промежутке и при t < 0.

Итак, мы детально рассмотрели преобразования Дарбу и Лапласа для уравнений БЛП. Они представляют собой весьма эффективный математический инструмент в поиске точных решений интегрируемых нелинейно растущих уравнений в двухмерном пространстве. Физический смысл уравнений БЛП с точки зрения теории диссипативных процессов не до конца понятен, поскольку только часть точных решений БЛП имеет диссипативных характер. Однако главной целью данной статьи являлось изучение эффектов двумеризации на примере точно интегрируемого нелинейного уравнения, сводящегося в одномерном пределе, к уравнению sin-Гордон. Эта цель была достигнута.

Из проведенного анализа вытекают два важных вывода, которые должны учитываться в теоретических и прикладных исследованиях, связанных с использованием оптических солитонов.

1. Двумерное обобщение уравнения синус-Гордон приводит к качественно новому поведению решений по сравнению с одномерным случаем.

2. Полученные решения демонстрируют режимы, весьма сходные с хорошо изученным поведением тепловых структур, поэтому такие структуры могут служить моделями, описывающими поведение двумерных солитонов указанного типа.

Список литературы

1. *Boiti M., Leon J.J.-P., Pempinelli F.* Spectral transform for a two spatial dimension extension of the dispersive long wave equation // Inverse Problems. 1987. Vol. 3. P. 371.

2. *Гарагаш Т.И.* О модификации теста Пенлеве для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // ТМФ. 1994. Т. 100, № 3. С. 367—376.

3. *Юров А.В.* Сопряженные цепочки дискретных симметрий (1+2) нелинейных уравнений // ТМФ. 1999. Т. 119, № 3. С. 419–428.

Об авторах

Андрей Алексеевич Шпилевой — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: AShpilevoi@kantiana. ru.

Артем Валерианович Юров — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: artyom_yurov@mail.ru

Владимир Алексеевич Гриценко — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: vgritsenko@kantiana.ru

About authors

Andrey Shpilevoy — PhD, associate professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: AShpilevoi@kantiana.ru

Artyom Yurov — Dr, professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: artyom_yurov@mail.ru

Vladimir Gritsenko— Dr, professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: vgritsenko@kantiana.ru